შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/101

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

თავდაპირველად განვიხილოთ შემთხვევა $x=0$ მაშინ მივიღებთ რომ
$f(yf(0)) = f(f(0))$. თუ $f(0)\neq 0$ მაშინ ავიღებთ a-სთვის
შესაბამის y_a და $y_a f(0)=a$ მაშინ ავიღებთ a-სთვის $f(a)=f(f(0))$
ანუ $f(x)=\text{const}$ მაშინ თუ $f(x)=c$ მივიღებთ რომ
$c = c + xc \Rightarrow xc=0$ ყველა x-სთვის ანუ $c=0$ თუ
$f(0)\neq$ მაშინ $f(x)=0$. ყველა x-სთვის [illegible]
თუ ჩავსვამთ $y=0$ [illegible] მივიღებთ რომ $f(x)=f(f(x))+xf(0)$
მაშინ $f(x)=0$ [illegible] $0=f(0)+xf(0)$ და თუ $f(0)\neq 0$ მაშინ

$0=x+1$ რაც [illegible] მივიღებთ რომ თუ $f(0)\neq 0$ მაშინ [illegible] $f(0)=0$
$f(0)=0$ და [illegible]
მაშინ $f(x)=0$ [illegible]
[illegible] x_0 რომ $f(x_0)\neq 0$. თუ [illegible]
$x_0\neq 0$-სთვის $f(x_0)=0$ მაშინ ჩავსვათ $x=x_0$ [illegible]
და მივიღებთ რომ $f(x_0+yf(x_0)) = f(f(x_0))+x_0f(y) \Rightarrow f(x_0)=0+x_0f(y) \Rightarrow$
$x_0f(y)=0$ [illegible] $x_0\neq 0$ [illegible] $f(y)=0$ ყველა y-სთვის
[illegible] მივიღებთ რომ $f(x)=0$, [illegible]
[illegible] y_0 და $f(y_0)\neq 0$ [illegible] თუ $f(a)=0$
მაშინ $a=0$. [illegible] ჩავსვათ $y=0$ და მივიღებთ რომ
$f(f(x))=f(x)$ [illegible] x-სთვის [illegible] ($a_0\neq 0$)
~~$f(a)=$~~ $f(a_0+k)=a_0$ [illegible] k [illegible]. მაშინ [illegible]
$f(f(a_0+k))=f(a_0+k) \Rightarrow f(a_0)=a_0$ [illegible]
$x=a_0+k$ და $y=\frac{-k}{a_0}$ მაშინ [illegible] ~~$f(x_0+k+yf(x_0+k$~~

$$f\left(a_0+k+\left(\frac{-k}{a_0}f(a_0+k)\right)\right) = f(f(a_0+k))+(a_0+k)f\left(\frac{-k}{a_0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(a_0+k-\frac{k}{a_0}\cdot a_0\right) = f(a_0)+(a_0+k)f\left(\frac{-k}{a_0}\right) \Rightarrow f(a_0)=f(a_0)+(a_0+k)f\left(\frac{-k}{a_0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_0+k)f\left(\frac{-k}{a_0}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} a_0+k=0 \\ f\left(\frac{-k}{a_0}\right)=0 \end{cases}$$ ~~[illegible]~~

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 101

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

(~~[illegible]~~ და $f(a_0)=0$. ე.ი. ვიგულოთ რომ

$\left[\begin{array}{l} a_0+k=0 \\ f(\frac{-k}{a_0})=0 \end{array}\right.$ ვინაიდან თუ $a_0+k=0$ მაშინ $f(a_0)=0$ რადგან $a_0=0$
(რადგან თუ $a_0\neq 0$ და $f(a_0)=0$ მაშინ $f(x)=0$ ყველა x-ისთვის,
~~[illegible]~~ [illegible])

ე.ი. თუ $a_0+k=0$ მაშინ $k=0$. ხოლო თუ $f(\frac{-k}{a_0})=0$
მაშინ $\frac{-k}{a_0}=0$ (რადგან თუ $\frac{-k}{a_0}\neq 0$ და $f(\frac{-k}{a_0})=0$ მაშინ $f(x)=0$. [illegible])

ე.ი. $\frac{-k}{a_0}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ a_0=0 \end{array}\right.$ თუ $a_0=0$ მაშინ $f(a_0)=0$ და $f(a_0+k)=0$ ე.ი. $a_0+k=0$ და $a_0=0$ [illegible]

ე.ი. $k=0$. ე.ი. ვიგულოთ რომ [illegible]
$k=0$ ე.ი. თუ $f(a_0+k)=a_0$ მაშინ $k=0$. ასევე
ნებისმიერი x_0-ისთვის თუ $f(x_0)=a_0$ მაშინ $x_0=a_0+k_0$
სადაც $k_0\in R$ ე.ი. $f(a_0+k_0)=a_0$ ე.ი. $k_0=0$ ე.ი. $x_0=a_0$.
ე.ი. $f(x_0)=x_0$ ყველა x_0-ისთვის. ე.ი. ვიგულოთ რომ
თუ არსებობს y_0 რომ $f(y_0)\neq 0$ მაშინ $f(x)=x$ ყველა x-ისთვის.
ე.ი. ვიგულოთ რომ ან $f(x)=0$ ან $f(x)=x$

პასუხი: ან $f(x)=0$ ან $f(x)=x$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

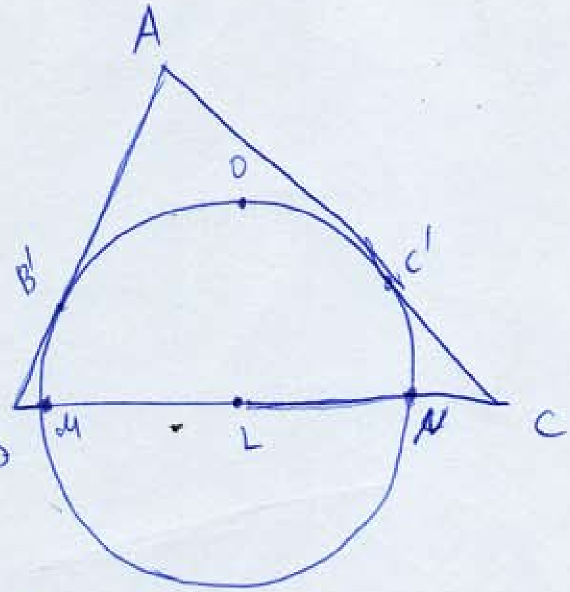
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

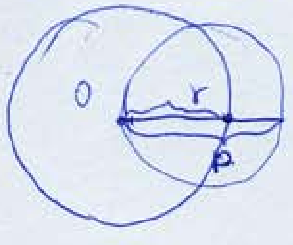
22.04.2012/ მათ/ II/ 101

ამოცანა № 5

გვერდი № 1



[illegible] ω [illegible]
[illegible] ABC-ს [illegible]
[illegible] ABC-ს [illegible]



[illegible] ω [illegible]
2 [illegible] ω [illegible]
[illegible] ABC-ს [illegible] ω [illegible]
[illegible] 2 [illegible]
[illegible] $D_\omega < R_{ABC}$ [illegible]
[illegible] $r = D$ [illegible] $r < D$ [illegible]
[illegible] 2 [illegible]
$D_\omega > R_{ABC}$ [illegible] ω [illegible] ABC-ს [illegible]
[illegible]
[illegible] $D_\omega > R_{ABC}$ [illegible] R_{ABC} [illegible] $C'M^2 + C'N^2$
[illegible] $\angle MC'N = 90°$ [illegible] $MN > R_{ABC}$
$C'M^2 + C'N^2$ [illegible] $R_{ABC} < D_\omega$ [illegible] 2 [illegible]